UYGULAMA

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini satırca indirgenmiş eşelon forma getiriniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_6}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$\varepsilon_1 : \alpha_3 \to \alpha_1 + \alpha_3$

$\quad \alpha_4 \to (-2)\alpha_1 + \alpha_4$

$\varepsilon_2 : \alpha_4 \to (-8)\alpha_2 + \alpha_4$

$\varepsilon_3 : \alpha_3 \to \frac{1}{2}\alpha_3$

$\varepsilon_4 : \alpha_4 \to (-9)\alpha_3 + \alpha_4$

$\varepsilon_5 : \alpha_1 \to (-1)\alpha_2 + \alpha_1$

$\varepsilon_6 : \alpha_2 \to \alpha_3 + \alpha_2$

2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini satırca indirgenmiş eşelon forma getiriniz

3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine denk matrisleri bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3}{\underset{\varepsilon_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & - \end{bmatrix}$$

satırca indirgenmiş eşelon formda köşegen üz.deki 1 lerin hem altı hem üstü sıfır olacak.

Scanned by CamScanner

4) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$A \approx R$ rank A = rank $R = 2$

5) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

rank $A = 4$

6) Aşağıdaki matrislerin regüler olup olmadıklarını araştırınız regüler olanların inverslerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Çözüm:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \text{ regülerdir.}$$

A^{-1} vardır.

Scanned by CamScanner

$$[A:I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/7 & 4/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & -9/7 & 12/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{I_3} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

c) $$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$\text{rank}A = \text{rank}R = 2$
$\neq 3$
olup regüler değil.

7) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$x_1 + 5x_2 - x_3 = 0$
$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
$x_3 = 0$

Scanned by CamScanner

8) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$

$4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$

$-5x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -1$

$0 = -1$

sistemin çözümü yoktur

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$

$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$

$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$

$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$

$x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$

$x_3 + 2x_4 = 0$

$x_6 = \frac{1}{3}$

$x_2 = r \quad x_5 = t \quad x_4 = s \quad$ 3 par.

Scanned by CamScanner

LU AYRIŞIMI

Bilinmeyen sayısının denklem sayısına eşit olduğu lineer denklem sistemlerinin çözümünde LU ayrışımı kullanılabilir.

$n \times n$ A matrisinin U üst üçgen matris ve L alt üçgen matris olmak üzere $A = LU$ biçiminde yazılabildiğini kabul edelim. Bu durumda A matrisi LU ayrışımına sahiptir veya A nın LU çarpımı vardır denir.

$A = LU$ için $AX = B$ lineer denklem sistemi $LUX = B$ olur. Burada $UX = Z$ alınırsa $LZ = B$ dir.

$LZ = B$ sisteminden Z ileri yerine koyma ile bulunur. $UX = Z$ sisteminden de X geri yerine koyma ile bulunur. Böylece $AX = B$ sisteminin çözümü bulunmuş olur.

UYARI: A matrisinin LU ayrışımı bulunurken , elementer satır işlemlerinden sadece "Bir satırın bir katının başka bir satıra eklenmesi" işlemiyle , elementer sütun işlemlerinden "iki sütunun yerdeğiştirmesi" dışındaki elementer sütun işlemiyle bulunur.

U nun Bulunması

U yu bulurken A ya köşegen altındaki elemanları sıfır yapan elementer satır işlemleri uygulanır.

L nin Bulunması

L yi bulurken A ya köşegenindeki elemanları 1, köşegenin üstündeki elemanları sıfır yapan sütun işlemleri uygulanır.

Scanned by CamScanner

Yani

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ ? & 1 & \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

farketmez sütun işlemleri

$$U = \begin{bmatrix} a & & ? \\ 0 & b & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$ farketmez

satır işlemleri.

Örnek:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}$$

matrisini $A = LU$ biçiminde yazınız.

ÇZM: önce U yu bulalım. Elemanter satır işlemlerinden sadece bir satırın katını bir başka satıra ekleriz.

$\mathcal{E}_1$: $\alpha_2 \to \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1$
$\alpha_3 \to \alpha_3 + 2\alpha_1$
$\alpha_4 \to \alpha_4 + \alpha_1$

$\mathcal{E}_2$: $\alpha_3 \to \alpha_3 + 2\alpha_2$
$\alpha_4 \to \alpha_4 - \alpha_2$

$\mathcal{E}_3$: $\alpha_4 \to \alpha_4 + 2\alpha_3$

$$A \overset{\mathcal{E}_1}{=} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & 11 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_2}{\approx} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathcal{E}_3}{\approx} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U$$

şimdi L yi bulalım.

Scanned by CamScanner

Şimdi L yi bulalım.

$\mathcal{E}_1: \beta_1 \to \frac{1}{6}\beta_1$

$\mathcal{E}_2: \beta_2 \to \beta_2 + 2\beta_1$
$\beta_3 \to \beta_3 + 4\beta_1$
$\beta_4 \to \beta_4 + (-4)\beta_1$

$\mathcal{E}_3: \beta_2 \to \left(-\frac{1}{2}\right)\beta_2$

$$A \overset{\mathcal{E}_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 4 \\ \frac{1}{2} & -3 & -6 & 1 \\ -2 & 8 & 21 & -8 \\ -1 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 13 & 0 \\ -1 & -2 & -14 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathcal{E}_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & 13 & 0 \\ -1 & 1 & -14 & 11 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}_4: \beta_3 \to \beta_3 + 4\beta_2$
$\beta_4 \to \beta_4 + \beta_2$

$\mathcal{E}_5: \beta_3 \to \frac{1}{5}\beta_3$

$$\overset{\mathcal{E}_5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}_6: \beta_4 \to \beta_4 + 2\beta_3$

$\mathcal{E}_7: \beta_4 \to \frac{1}{8}\beta_4$

$$\overset{\mathcal{E}_6}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathcal{E}_7}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$A = LU$ şeklinde yazılmışolur.

Scanned by CamScanner

Crout İndirgemesi

$n \times n$, A matrisinin LU ayrışımındaki L ve U matrislerini bulmamızı sağlayan bir diğer algoritmadır.

Elemanter satır işlemlerinden satır yer değiştirmesi dışındaki diğer ikisi kullanılır.

Sütun işlemlerinden ise sadece bir sütunun bir katının diğer sütuna eklenmesi elemanter işlemi kullanılır.

U nun Bulunması :

U matrisini bulurken A ya köşegen elemanlarını 1, köşegen altını sıfır yapan satır işlemleri uygulanır.

L nin Bulunması

L yi bulurken A ya köşegen üzerini sıfır yapan sütun işlemleri uygulanır.

Örnek :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}$$

matrisini Crout indirgemesi yöntemiyle LU çarpanlarına ayırınız.

Önce U yu bulalım.

ε_1: $\alpha_2 \to \alpha_2 + \alpha_1$
$\alpha_3 \to \alpha_3 - 3\alpha_1$
$\alpha_4 \to \alpha_4 - 2\alpha_1$

$$A \overset{\varepsilon_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -9 & 10 & -8 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

ε_2: $\alpha_2 \to \frac{1}{3}\alpha_2$

$$\overset{\varepsilon_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & -9 & 10 & -8 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

ε_3: $\alpha_3 \to \alpha_3 + 9\alpha_2$
$\alpha_4 \to \alpha_4 + 3\alpha_2$

Scanned by CamScanner

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2/3 & 5/3\\ 0 & 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 3 & -3\end{bmatrix}\overset{\varepsilon_4}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2/3 & 5/3\\ 0 & 0 & 1 & 7/4\\ 0 & 0 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$\varepsilon_4 : \alpha_3 \to \frac{1}{4}\alpha_3$

$\varepsilon_5 : \alpha_4 \to \alpha_4 - 3\alpha_3$

$\varepsilon_6 : \alpha_4 \to \left(-\frac{4}{33}\right)\alpha_4$

$$\overset{\varepsilon_5}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2/3 & 5/3\\ 0 & 0 & 1 & 7/4\\ 0 & 0 & 0 & -33/4\end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_6}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2/3 & 5/3\\ 0 & 0 & 1 & 7/4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = U$$

Şimdi L yi bulalım.

$\varepsilon_1 : \beta_2 \to \beta_2 + (-2)\beta_1$

$\beta_3 \to \beta_3 + 2\beta_1$

$\beta_4 \to \beta_4 - 3\beta_1$

$\varepsilon_2 : \beta_3 \to \beta_3 + \frac{2}{3}\beta_2$

$\beta_4 \to \beta_4 - \frac{5}{3}\beta_2$

$$A \overset{\varepsilon_1}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -2 & 5\\ 3 & -9 & 10 & -8\\ 2 & -3 & 5 & -8\end{bmatrix}\overset{\varepsilon_2}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0\\ 3 & -9 & 4 & 7\\ 2 & -3 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$\varepsilon_3 : \beta_4 \to \beta_4 - \frac{7}{4}\beta_3$

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0\\ 3 & -9 & 4 & 0\\ 2 & -3 & 3 & \frac{-33}{4}\end{bmatrix} = L$$

$A = LU$ olur.

Scanned by CamScanner